

量子纠错中的两种纠错码—— Surface Code VS Color Code

高健硕

物理学院 2023 级本科生

2025 年 5 月 13 日

1 稳定子形式理论

定义投影算符

$$\Pi_C = \frac{1}{2^m} (I + S_1)(I + S_2) \dots (I + S_m) \quad (1)$$

其中 $S_i \in S$ 为编码空间上的稳定子生成元。

对于作用在编码空间量子态上的错误，稳定子和错误对易，即

$$S_i E |\psi\rangle = E S_i |\psi\rangle$$

而对于非编码空间上的错误，稳定子和错误反对易，即

$$S_i E |\psi\rangle = -E S_i |\psi\rangle$$

利用这两个性质，可以得到

$$\Pi_C |\psi\rangle = |\psi\rangle, |\psi\rangle \in C \quad (2)$$

$$\Pi_C |\psi\rangle = 0, |\psi\rangle \notin C \quad (3)$$

也就是 Π_C 有两个本征值 1 和 0，因此这个投影算符就对应了编码空间的维度

$$\text{Tr}[\Pi_C] = \text{dim}(C) \quad (4)$$

又因为 Π_C 实际上遍历了稳定子群中的所有元素，而其中包含泡利矩阵成分的元素求迹后均为 0，因此最终贡献只有单位算符

$$\text{dim}(C) = \text{Tr}[\Pi_C] \quad (5)$$

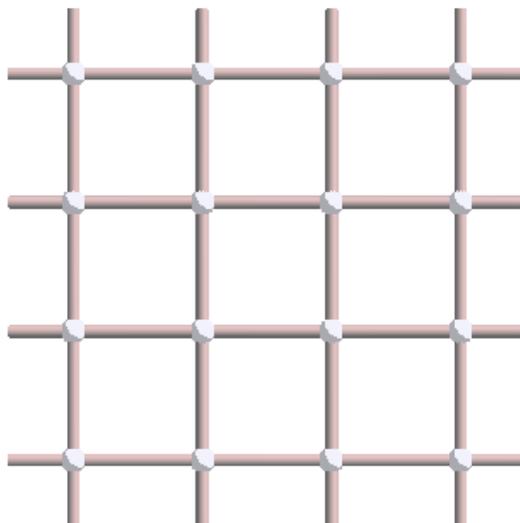
$$= \frac{2^n}{2^m} \quad (6)$$

$$= 2^{n-m} \quad (7)$$

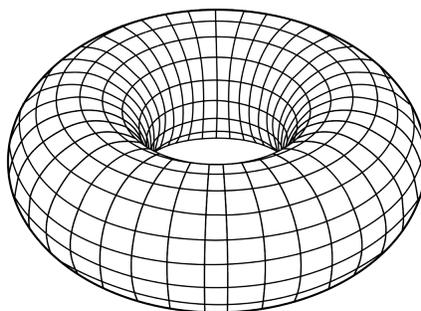
所以逻辑比特对应的希尔伯特空间维数为 2^{n-m} ，也即这个代码的 $k = n - m$ 。

2 表面码

表面码和颜色码都属于稳定子码，可以用稳定子群的语言来描述。
一般的表面码定义在 $L \times L$ 的正方形网格上，如图所示

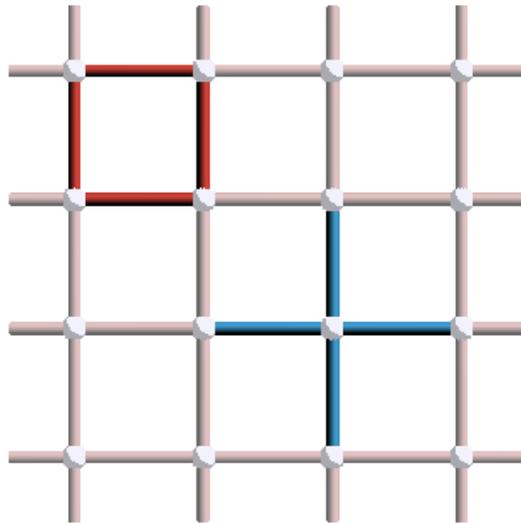


其中，量子比特位于方形网格的边上，这个网格是一个环的展开图

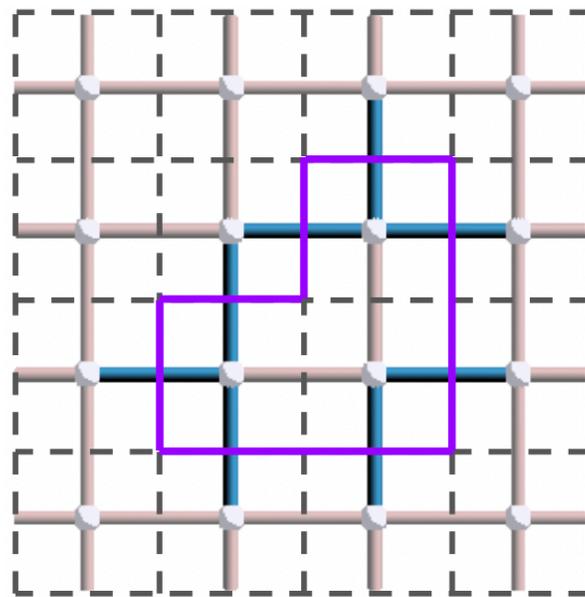


后面颜色码也是基于同样的道理。

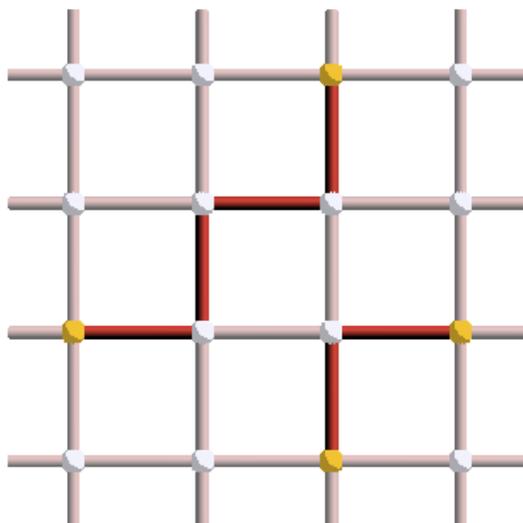
我们定义两种稳定子，红色的是 X 稳定子，蓝色的是 Z 稳定子，作用方式分别为方块和十字



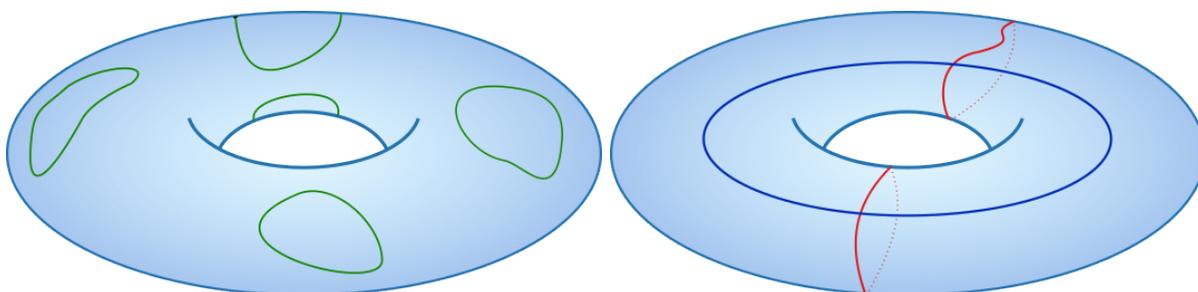
如果把每个方块的中心点上一个点，再把这些新的点作为网格点，就会发现 X 和 Z 稳定子是对偶的。



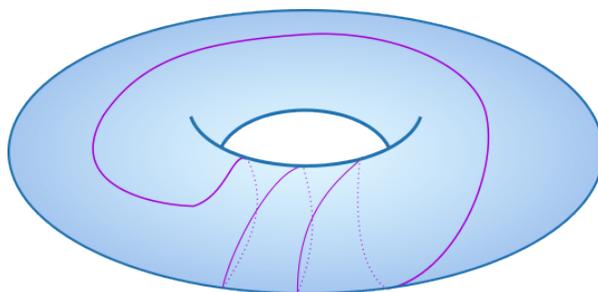
以 X 型错误为例，由图可知，症状检测只会错误路径的端点检测到异常



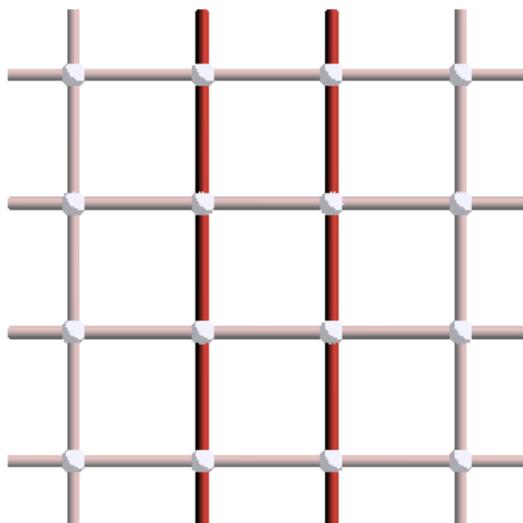
有了这些我们可以引入操作算符。
观察下面两张图



左图上的『圈』是可以连续形变直至收缩为点的，而右边的两种『圈』则不能，事实上，左侧的这些『圈』等效于稳定子测量，而右侧这些非平凡的算子是引入了无法被稳定子探测到的错误，也就是逻辑算子。当然非平凡类也不只这两种，下面这样的也算



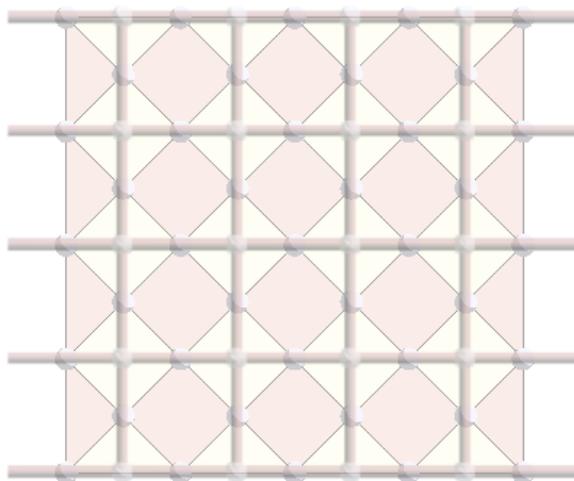
不过因为表面码有一个很好的性质，两条水平（或者竖直）的线逻辑算符会抵消掉成为一个单位算符（可以看出，这两条错误路径可以有一竖溜的 X 稳定子叠加出来）



所以，其实只有两类非平凡的环路。另外，在这个例子中， $n = 2L^2$ ， $m = 2L^2 - 2$ ，因此 $k = 2$ ，也就是说这个环面编码了两个比特。

为了解码错误，可以采用极大似然解码，也就是给每两个错误之间加上权重（两个点之间的曼哈顿距离），然后用最小权重匹配就可以了。当然如果纠错操作与错误完美匹配或者正好补成稳定子就不会造成错误，一旦合成出来的是一个逻辑运算符就纠错失败。

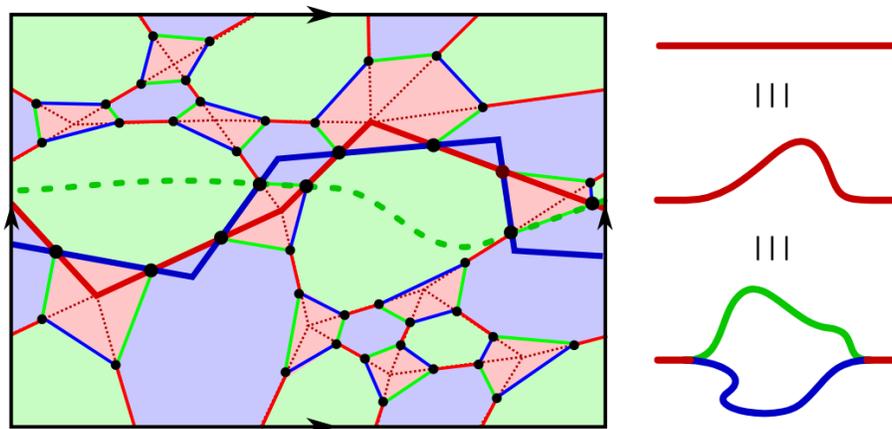
另一种常见的是旋转表面码



此时量子比特就被编码在格点上，这样的代码为 $[[L^2, 1, L]]$ 。

3 颜色码

颜色码与表面码的理论基础相同，区别在于颜色码使用的编码图中每个顶点的度为 3，并且稳定子测量不再以板块和十字相区别。



图中，红绿蓝三个板块分别代表三类稳定子测量，相邻两个板块颜色不同，并且相同颜色的板块用对应颜色的线连接，在提出者的论文中引入了收缩格点的概念，即红色板块中间点上一个点作为格点，这样将相邻收缩格点连接起来就能得到一条线，如图所示，可以通过稳定子相互转换的两个线操作算符属于同一个同伦类。
由欧拉定理

$$\chi = v + f - e \tag{8}$$

又由顶点的度为 3

$$3v = 2e \tag{9}$$

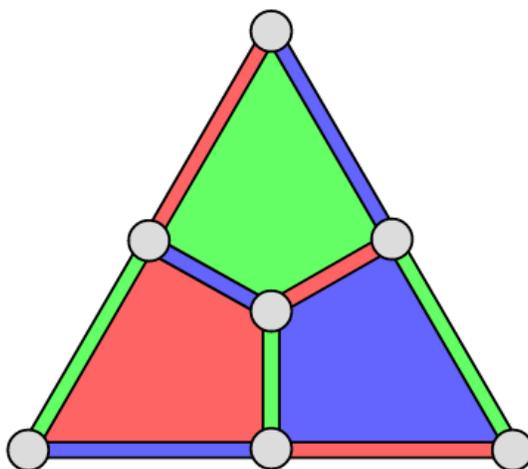
因此

$$k = n - m \tag{10}$$

$$= v - (2f - 4) \tag{11}$$

$$= 4 - 2\chi \tag{12}$$

对于球面，颜色码不编码任何逻辑比特，而如果从中挖去一个格点及周边的三个板块，就能得到 Steane 码



这是一个 $[[7, 1, 3]]$ 的纠错码。